Graphes

Vincent Despré

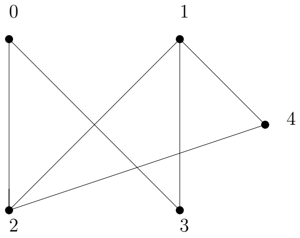
Polytech Nancy

Définition

Graphe

Un graphe est un ensemble de sommet V ainsi qu'un ensemble d'arêtes E, une arête étant un couple de sommets de V.

Exemple: V={0,1,2,3,4} et E={(0,2),(0,3),(1,2),(1,3),(1,4),(2,4)}



Structure de données: Matrices

Matrice d'adjacence

Soit G un graphe à n sommets dont les sommets sont numérotés de 0 à $n-1$. Alors la matrice d'adjacence $A^G \in \mathcal{M}_{n,n}$ associée à G est la matrice dont les entrées vérifient:

- Si G contient l'arête (i,j) alors $A^G_{i,j} = 1$.
- Sinon, $A^G_{i,j} = 0$.

- Taille n^2.
- Information globale.
- On a accès à tous les outils des matrices.

Puissances de la matrice d'adjacence

$(A^G_{i,j})^k$ est le nombre de chemins disjoints dans G de i à j et de longueur exactement k.

Structure de données: premier degré

Construction en POO

On crée des classes comme suit:

- Sommet: contient un ensemble d'autres sommets voisins.
- Graphe: contient l'ensemble des sommets du graphe.

- Taille $n + m$.
- Information locale.
- Les algos se transcrivent naturellement dans ce cadre.

Définition

Arbre

Un arbre est un graphe qui vérifie:

1/ on peut aller de n'importe quel sommet à n'importe quel autre par un chemin d'arête (on dit que le graphe est connexe).

2/ le graphe ne contient pas de cycle (un cycle est un chemin d'arêtes différentes qui revient à son sommet de départ).

Remarques:

- Un arbre avec n sommets a n-1 arêtes.
- Un graphe connexe avec n sommets et n-1 arêtes est un arbre.

Arbre couvrant

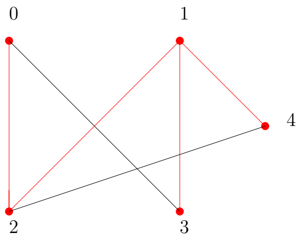
Définition

Soit G un graphe. Un sous-graphe de G qui contient tous les sommets et qui est un arbre est appelé arbre couvrant de G.

Proposition

Tout graphe connexe admet un arbre couvrant.

G: ensemble des arêtes, arbre couvrant en rouge.



BFS

INPUT: un graphe G et un racine r.
OUTPUT: un arbre couvrant (en largeur) de G.

Algo:

1/ On crée un arbre T contenant uniquement r.

2/ On crée un file d'attente Q et on met r dedans.

3/ On prend le premier sommet v de Q et on ajoute tous ces voisins qui ne sont pas encore dans T dans Q. Pour chaque sommet ajouté à Q, on l'a ajoute aussi à T avec un arête reliant ce sommet à v.

4/ On recommence 3/ tant que Q n'est pas vide.

Complexité

Cet algorithme calcule un arbre couvrant BFS en $O(n + m)$ opérations où n est le nombre de sommets du graphe et m son nombre d'arêtes.

Dijkstra

Si G est pondéré (les arêtes ont des poids positifs) alors on peut chercher à avoir un arbre de plus court chemin depuis une racine r.
Algorithme de Dijkstra: même algo que le BFS mais avec une gestion plus fine de la file d'attente Q.

Complexité

Cet algorithme calcule un arbre couvrant BFS en $O((n+m)\log(n))$ opérations.

Bellman-Ford

INPUT: un graphe G et un racine r.
OUTPUT: un arbre de plus courts chemins de G.

Algo:

1/ Chaque sommet du graphe doit connaître une distance à la racine courante et un sommet précédent. On initialise les distances à infini (0 pour la racine) et les précédents à null.

2/ Chaque sommet s regarde l'ensemble de ses voisins et change sa distance et sont prédécesseur si la somme de la distance d'un voisin v et du poids de l'arête (s, v) est inférieure à la distance courante de s.

3/ On recommence 2/ tant qu'un sommet est mis à jour.

Complexité

L'algorithme termine après, au plus, n étapes 2/ et termine donc en $O(n \cdot m)$ opérations.

Coloration: Principe

Définition

Soit $G = (V, E)$ un graphe et $C = \{0, \cdots, k\}$ un ensemble de couleurs. Une coloration de G est une fonction c de V dans C qui associe une couleur à chaque sommet telle que:

$$\forall (v_0, v_1) \in E, c(v_0) \neq c(v_1)$$

- Les "couleurs" peuvent être interprétées de différentes façon mais on les considérera plutôt comme des nombres entiers en général.
- Les problèmes de coloration sont souvent difficile.
- Le théorème des 4 couleurs est sans doute le plus célèbre de toute la théorie des graphes.

Algorithme naïf

Définition: degré

Le degré d'un sommet correspond au nombre de voisins que ce sommet a dans le graphe.

Théorème

Soit G un graphe de degré maximal k, alors G est $k+1$ coloriable.

Algo:

1/ On choisit un ordre pour les sommets du graphe.

2/ On attribue au premier sommet de la liste la couleur de $C = \{0, \cdots, k\}$ la plus faible qui n'est pas présente chez ses voisins.

3/ On enlève le premier sommet de la liste et on retour en 2/ si la liste n'est pas vide.

Problème du flot

Définition: graphe orienté

Un graphe orienté G est un ensemble de sommet V ainsi qu'un ensemble d'arêtes E, une arête étant une paire de sommets de V. Une paire est orientée, ce qui signifie que (v_0, v_1) est une arête différente de (v_1, v_0).

Définition: flot

Soit $G = (V, E)$ un graphe orienté et s et d deux sommets de V. Un flot sur G est une fonction f qui associe un poids à chaque arête de E telle que:

- $\forall v \in V \backslash \{s, d\}$, la somme des valeurs de f des arêtes entrant dans v est égal à celle des arêtes sortantes de v.
- Les valeurs de f sortants de s sont égales à celles entrant dans d, c'est la valeur du flot.

Algorithme de Ford-Fulkerson

INPUT: un graphe orienté pondéré G et un couple (s, d).
OUTPUT: un flot maximal.

Algo:

1/ On initialise le flot à 0 sur toutes les arêtes.

2/ On cherche un chemin orienté de s à d.
Si on n'en trouve pas on renvoie le flot courant.

3/ On ajoute le chemin trouvé avec le plus grand poids admissible. On retire la valeur correspondante de chaque arête et on ajoute une arête de même poids allant dans le sens inverse.

4/ On recommence 2/.

Théorème

Si les poids sont entiers, l'algorithme termine en $O(m \cdot F)$ opérations où F est la valeur du flot maximal.

Algorithme de Ford-Fulkerson

INPUT: un graphe orienté pondéré G et un couple (s, d).
OUTPUT: un flot maximal.

Algo:

1/ On initialise le flot à 0 sur toutes les arêtes.

2/ On cherche un chemin orienté de s à d.
Si on n'en trouve pas on renvoie le flot courant.

3/ On ajoute le chemin trouvé avec le plus grand poids admissible. On retire la valeur correspondante de chaque arête et on ajoute une arête de même poids allant dans le sens inverse.

4/ On recommence 2/.

Théorème

Le flot maximal est égal à la coupe minimale.